Nombres de Bernoulli

Partie I

1. Soit f une fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que les conditions qui suivent définissent une unique fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:
   $\begin{cases} F' = f \\ \int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$ et exprimer F à l'aide de $G : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. On définit une suite de fonctions B_n par les : $B_0 = 1$, $B'_{n+1} = B_n$ et $\int_0^1 B_{n+1}(t)\mathrm{d}t = 0$ pour tout $n \geq 0$.
   Expliciter les fonctions B_1, B_2 et B_3.

3. Montrer, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2, l'égalité : $B_n(0) = B_n(1)$.

4. On définit une suite de fonctions C_n en posant pour tout n entier naturel : $C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$.
   Montrer que cette suite de fonctions vérifie les conditions du 2°) définissant la suite des B_n.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = B_n$.

5. Qu'en déduit-on pour les graphes des fonctions B_n ?

Partie II

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $R_n(x) = B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x)$.

1. Démontrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall x \in \mathbb{R}, R_{n+1}(x) = \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Déterminer l'expression de $R_n(x)$.

3. En déduire que, pour tout entiers naturels m et n : $\sum_{k=1}^{m} k^n = n!(B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(1))$.

4. Donner l'expression de $\sum_{k=1}^{m} k^2$.

Partie III

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
   Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, $\lim_{x \to +\infty} \int_0^1 f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = 0$.

2. Montrer pour N entier naturel non nul : $\forall t \in]0,1[$, $1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t) = \dfrac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_{n,k} = \int_0^1 B_{2n}(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t$.

3.a Calculer $I_{0,k}$ et $I_{1,k}$.

3.b Pour $n \in \mathbb{N}^*$, former une relation liant $I_{n+1,k}$ et $I_{n,k}$.

3.c Donner l'expression générale de $I_{n,k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note φ_n la fonction définie sur $]0,1[$ par $\varphi_n(t) = \dfrac{B_{2n}(t) - B_{2n}(0)}{\sin(\pi t)}$.

4.a Justifier que φ_n peut se prolonger par continuité en 0 et en 1.
On notera encore φ_n la fonction obtenue par ce prolongement.

4.b Donner une expression de $\int_0^1 \varphi_n(t)\sin(2N+1)\pi t\,\mathrm{d}t$ en fonction de n, N et $B_{2n}(0)$.

4.c On admet que φ_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Exprimer $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2n}}$ en fonction de m et de $B_{2m}(0)$.

Quelle valeur obtient-on lorsque $n=1$?